



**La Principauté de Monaco et l'Association Monaco Mathématiques
sont heureux de vous souhaiter la bienvenue aux**

Olympiades Monégasques de Mathématiques

Session 2026

Classes de seconde

CONSIGNES

- L'épreuve a une durée de deux heures.
- Les calculatrices sont autorisées.
- Au moment de quitter définitivement la salle, les candidats doivent impérativement rendre leur sujet.
- Merci d'indiquer clairement votre nom, votre prénom, votre niveau et votre établissement sur chaque page de votre copie.
- Il n'est pas nécessaire de résoudre tous les exercices pour obtenir la note maximale ou la meilleure appréciation.
- Si vous ne parvenez pas à formuler une réponse complète, il est recommandé de présenter vos recherches, vos essais et votre raisonnement.
- En cas d'erreur supposée dans l'énoncé, le candidat doit l'indiquer sur sa copie, expliquer les choix faits pour poursuivre et continuer normalement sa composition.

CONSEILS

- Faites de votre mieux
- Respirez, ne stressiez pas
- Faites vous plaisir à résoudre ces petites énigmes mathématiques
- **BON COURAGE À TOUS !**



Gouvernement Princier
PRINCIPAUTÉ DE MONACO

Direction de l'Éducation Nationale, de la Jeunesse et des Sports



page 1 sur 8

Exercice 1. Le fée qui transforme les $+$ en $\times$!

On admet l'existence d'une fonction f définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tous les entiers naturels x et y :

$$f(1) = 1/2 \text{ et } f(x + y) = f(x)f(y)$$

Quelle est la valeur de : $f(2) + f(0) + f(2) + f(1)$?

Exercice 2. Les bons nombres.

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est **bon** s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.

On dit qu'il est **mauvais** s'il n'est pas **bon**.

Ainsi, par exemple :

$$2 = 1 + 1 \text{ et } 1/1 + 1/1 = 2 \neq 1.$$

La seule décomposition possible de 2 étant $1 + 1$, 2 est donc **mauvais**.

$$3 = 1 + 2 \text{ et } 1/1 + 1/2 \neq 1 ; 3 = 1 + 1 + 1 \text{ et } 1/1 + 1/1 + 1/1 \neq 1.$$

Les deux décompositions possibles de 3 ayant été examinées, 3 est donc **mauvais**.

$$4 = 2 + 2 \text{ et } 1/2 + 1/2 = 1. \text{ Donc } 4 \text{ est } \mathbf{bon}.$$

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 5 à 10 s'il est **bon** ou **mauvais**.
2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est **bon**.
3. Montrer que si n est **bon**, alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont **bons**.
4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont **bons**. Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Exercice 3. Optimisation de forme.

$ABCD$ est un rectangle tel que $AB = 10$ cm et $BC = 8$ cm. N est un point mobile sur le segment $[BC]$. On note x la longueur en centimètres de $[BN]$. M et P sont les points respectifs de $[AB]$ et $[CD]$ tels que $AM = BN = CP = x$.

Le but de cet exercice est de déterminer la position de N sur le segment $[BC]$ pour que la somme des aires des triangles BMN et CNP soit maximale.

1. Faire un schéma.
2. Justifier que $x \in [0; 8]$.
3. Exprimer BM en fonction de x .
4. Exprimer CN en fonction de x .
5. Montrer que l'aire du triangle BMN est égale à $\frac{x}{2}(10 - x)$.
6. On note f la fonction qui à la longueur x associe la somme des aires des triangles BMN et CNP .
 - a. Vérifier que $f(x) = x(9 - x)$.
 - b. Vérifier que $f(x) = -(x - 4,5)^2 + 20,25$.
7. Déterminer la solution au problème posé.

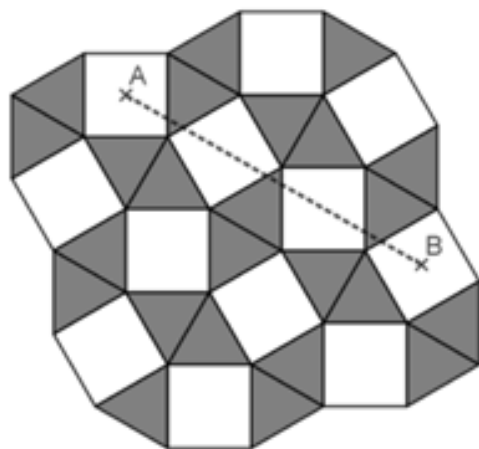
Exercice 4. Suites de chiffres.

Le protocole suivant permet de définir des suites de chiffres :

- Donner les quatre premiers chiffres de la suite, par exemple 1 - 2 - 3 - 4.
 - Chaque terme nouveau est le chiffre des unités de la somme des quatre précédents.
- Par exemple, en partant de 1 - 2 - 3 - 4, les chiffres qui suivent sont : 0 - 9 - 6 - 9 - 4 - 8 - 7 - etc.

1. Quel est le vingtième chiffre de la suite dont les premiers termes sont 1 - 7 - 8 - 9 ?
2. Quels sont les chiffres de la suite dont les premiers termes sont 5 - 5 - 5 - 5 ?
3. La suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 fait-elle apparaître la succession 2 - 0 - 1 - 7 ?
4. La suite commençant par 2 - 0 - 1 - 8 fait-elle apparaître une deuxième fois 2 - 0 - 1 - 8 ?

Exercice 5. Ma jolie cuisine.



Le sol de ma cuisine est couvert de céramiques carrées ou triangulaires équilatérales dont les côtés mesurent 20 cm, comme l'illustre la figure ci-contre. Les points A et B sont les centres de deux tuiles carrées séparées par deux autres tuiles carrées.

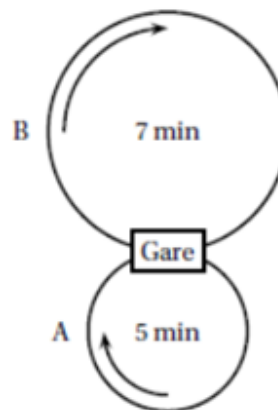
Quelle est la distance AB ?

Exercice 6. Les petits trains.

Deux trains A et B suivent des parcours circulaires et se croisent à la gare G.

Le train A fait un tour en 5 minutes. Le train B fait un tour en 7 minutes.

Dans combien de temps les deux trains se retrouveront-ils ensemble à la gare :



- a. S'ils sont partis en même temps de la gare.
- b. Si le train A est parti de la gare depuis 4 minutes et le train B depuis 2 minutes ?

Exercice 7. Chemins de fonctions.

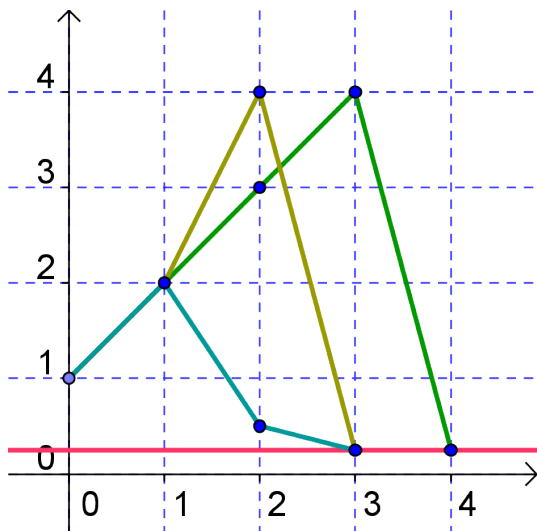
Définitions.

- Panel de fonctions : ensemble de fonctions avec lesquelles on pourra construire les chemins de fonctions.
- Chemins de fonctions : étant donné un panel de fonctions et deux nombres réels a , le point de départ, et b , le point d'arrivée, le chemin est une liste de fonctions prises dans le panel, telle que b est l'image a par compositions successives des fonctions de la liste.
- Longueur d'un chemin : nombre de fonctions employées dans le chemin.

N.B. : Un chemin de longueur 0 ne contient aucune fonction. Son point d'arrivée est égal à son point de départ.

Exemple 1 :

On fournit le panel de fonctions définies sur $]0; +\infty[$: fonction inverse notée f , fonction carré notée g , fonction $x \mapsto x + 1$ notée h . Le panel est donc $\{f, g, h\}$, noté $\mathcal{P}$.



Chemins de $a = 1$ à $b = \frac{1}{4}$:

• $1 \xrightarrow{h} 2 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} \frac{1}{4}$ donc $f(g(h(1))) = \frac{1}{4}$

le chemin est $[h, g, f]$ sa longueur est 3.

• $1 \xrightarrow{h} 2 \xrightarrow{f} \frac{1}{2} \xrightarrow{g} \frac{1}{4}$ donc $g(f(h(1))) = \frac{1}{4}$

le chemin est $[h, f, g]$ sa longueur est 3.

• $1 \xrightarrow{h} 2 \xrightarrow{h} 3 \xrightarrow{h} 4 \xrightarrow{f} \frac{1}{4}$ donc $f(h(h(h(1)))) = \frac{1}{4}$

le chemin est $[h, h, h, f]$ sa longueur est 4.

Question 1. Donner un autre chemin de 1 à $\frac{1}{4}$ avec le panel $\mathcal{P}$.

Exemple 2. On considère le panel $\mathcal{P}' = \{f, g\}$ où f désigne la fonction carré et g désigne la fonction $x \mapsto x + 1$, toutes les deux définies sur $\mathbb{R}$.

Série de questions 2. Dans chaque question, on fournit le point de départ a et un chemin construit grâce au panel $\mathcal{P}'$. On demande le point d'arrivée b .

a. $a = 0, [f, f, f, f, f, f]$.

b. $a = 0, [g, g, g, g]$.

c. $a = 0, [g, f, f, f]$.

d. $a = 0, [g, g, f, f, f, f]$.

e. $a = 1$, le chemin contient au moins une fois f et ne contient que des f .

Série de questions 3. Dans les questions suivantes, on donne le point d'arrivée. On utilise exclusivement le panel $\mathcal{P}'$.

a. Soit n un entier naturel non nul.

Donner deux chemins distincts dont n est le point d'arrivée.

- b.** Donner deux chemins distincts passant par f dont le point d'arrivée est 37.
- c.** Donner tous les chemins et leurs longueurs dont le point d'arrivée est -1 .
- d.** Combien y a-t-il de chemins dont le point d'arrivée est 0 ?
- e.** Donner tous les chemins de longueur 3 dont le point d'arrivée est 8 et les points de départ de ces chemins.

Série de questions 4.

- a.** Soient a et b deux nombres réels quelconques et $\mathcal{C}$ un chemin qui utilise exclusivement le panel $\mathcal{P}'$ menant de a à b .

On suppose que $b < 0$.

Démontrer que $\mathcal{C}$ ne contient pas f .

Démontrer que $a \leq b$, préciser le ou les cas d'égalité.

- b.** On considère un parcours qui contient f et g , dont le point de départ est un réel a et le point d'arrivée est un réel b .

Est-il vrai que nécessairement, $|a| < |b|$? Justifier la réponse.

Exemple 3. On considère un panel $\mathcal{P}''$ qui contient trois fonctions affines f , g et h .

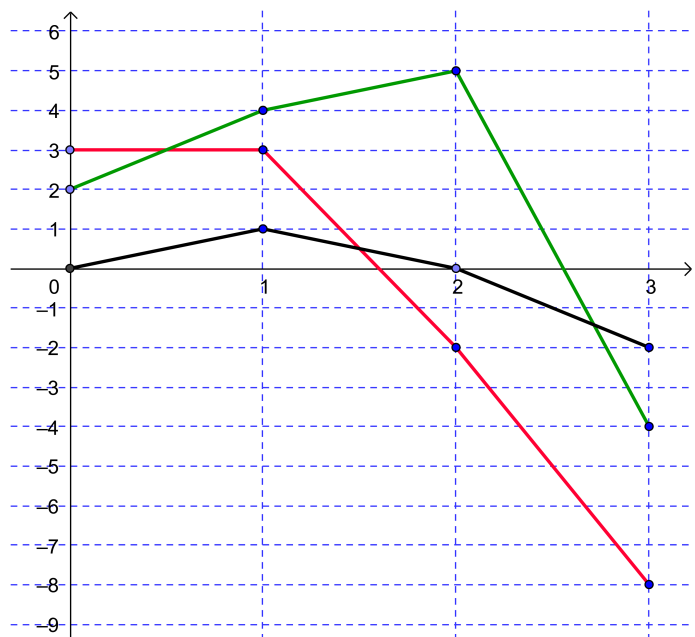
Hélas ! Ces fonctions ont été perdues.

Mais on a pu fabriquer les chemins suivants grâce au panel $\mathcal{P}''$:

Chemin 1 : départ $a = 3$ et $[f, g, h]$,

Chemin 2 : départ $a = 2$ et $[h, f, g]$,

Chemin 3 : départ $a = 0$ et $[g, g, h]$.



Et on a réussi à construire la représentation graphique des chemins 1, 2 et 3 (donnée en bas de la page précédente).

Consigne : étant donné le point de départ a réel, donner le point d'arrivée du chemin $[g, g, h, f]$ en fonction de a .